Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : applications et interprétation
Niveau supérieur
Épreuve 2

Lundi 9 mai 2022 (matin)

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2222 – 7217

8 pages

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 13]

Scott achète de la nourriture pour son chien dans de grands sacs et lui donne la même quantité de nourriture chaque jour. La quantité de nourriture pour chien restant dans le sac à la fin de chaque jour peut être modélisée par une suite arithmétique.

Un jour particulier, Scott a ouvert un nouveau sac de nourriture pour chien et a nourri son chien. À la fin du troisième jour, il restait $115{,}5$ tasses de nourriture pour chien dans le sac et à la fin du huitième jour, il en restait 108 tasses dans le sac.

(a) Trouvez le nombre de tasses de nourriture pour chien

(i) donné chaque jour au chien ;

(ii) restant dans le sac à la fin du premier jour. [4]

(b) Calculez le nombre de jours pendant lesquels Scott peut nourrir son chien avec un sac de nourriture. [2]

En 2021, Scott a dépensé 625 \$ en nourriture pour chien. Scott s'attend à ce que le montant qu'il dépense en nourriture pour chien augmente à un taux annuel de $6{,}4\%$.

(c) Déterminez le montant que Scott s'attend à dépenser en nourriture pour chien en 2025. Arrondissez votre réponse au dollar près. [3]

(d) (i) Calculez la valeur de $\sum_{n=1}^{10}(625 \times 1{,}064^{(n-1)})$.

(ii) Décrivez ce que la valeur de la partie (d)(i) représente dans ce contexte. [3]

(e) Commentez la pertinence de modéliser ce scénario avec une suite géométrique. [1]

2. [Note maximale : 15]

Un bar prépare x litres de café chaque matin. Le profit du bar chaque matin, C, mesuré en dollars, est modélisé par l'équation suivante :

$$C = \frac{x}{10}\left(k^2 - \frac{3}{100}x^2\right),$$

où k est une constante positive.

(a) Trouvez une expression pour $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$ en fonction de k et de x. [3]

(b) À partir de là, trouvez la valeur maximale de C en fonction de k. Donnez votre réponse sous la forme pk^3, où p est une constante. [4]

Le gérant du bar sait que le bar fait un profit de 426 \$ lorsque 20 litres de café sont préparés le matin.

(c) (i) Trouvez la valeur de k.

(ii) Utilisez le modèle pour trouver la quantité de café que le bar doit préparer chaque matin pour maximiser son profit. [3]

(d) Esquissez la représentation graphique de C en fonction de x, en indiquant les coordonnées du maximum et des points d'intersection avec l'axe des abscisses. [3]

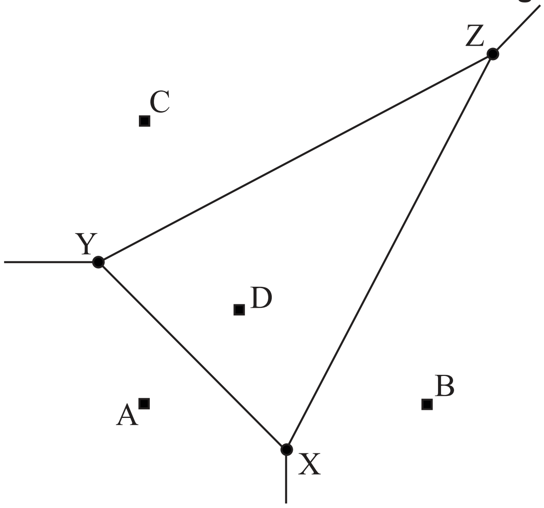
Le gérant du bar souhaite servir le plus de clients possible.

(e) Déterminez la quantité maximale de café que le bar peut préparer sans entraîner de perte d'argent pour la matinée. [2]

3. [Note maximale : 18]

Le diagramme de Voronoï ci-dessous montre quatre supermarchés représentés par des points dont les coordonnées sont $\mathrm{A}(0\ ;\ 0)$, $\mathrm{B}(6\ ;\ 0)$, $\mathrm{C}(0\ ;\ 6)$ et $\mathrm{D}(2\ ;\ 2)$. Les sommets X, Y, Z sont également représentés. Toutes les distances sont mesurées en kilomètres.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez le milieu de $[\mathrm{BD}]$. [2]

(b) Trouvez l'équation de (XZ). [4]

L'équation de (XY) est $y = 2 - x$ et l'équation de (YZ) est $y = 0{,}5x + 3{,}5$.

(c) Trouvez les coordonnées de X. [3]

Les coordonnées de Y sont $(-1\ ;\ 3)$ et les coordonnées de Z sont $(7\ ;\ 7)$.

(d) Déterminez la longueur exacte de $[\mathrm{YZ}]$. [2]

(e) Sachant que la longueur exacte de $[\mathrm{XY}]$ est $\sqrt{32}$, trouvez la mesure de l'angle $\mathrm{X\hat{Y}Z}$ en degrés. [4]

(f) À partir de là, trouvez l'aire du triangle XYZ. [2]

Un urbaniste croit que plus l'aire de la cellule de Voronoï XYZ est grande, plus les gens feront leurs courses au supermarché D.

(g) Indiquez une critique de cette interprétation. [1]

4. [Note maximale : 15]

Un élève qui s'intéresse à la relation entre les réactions chimiques et la température trouve l'équation d'Arrhenius sur Internet.

$$k = A\mathrm{e}^{-\frac{c}{T}}$$

Cette équation relie une variable k à la température T, où A et c sont des constantes positives et $T > 0$.

(a) Montrez que $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}T}$ est toujours positif. [3]

(b) Étant donné que $\lim_{T \to \infty} k = A$ et $\lim_{T \to 0} k = 0$, esquissez la représentation graphique de k en fonction de T. [3]

L'équation d'Arrhenius prédit que la représentation graphique de $\ln k$ en fonction de $\frac{1}{T}$ est une droite.

(c) Écrivez

(i) la pente de cette droite en fonction de c ;

(ii) l'ordonnée à l'origine de cette droite en fonction de A. [4]

Les données suivantes sont trouvées pour une réaction particulière, où T est mesurée en Kelvin et k est mesurée en $\mathrm{cm}^3\ \mathrm{mol}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$:

T	k
590	5×10^{-4}
600	6×10^{-4}
610	10×10^{-4}
620	14×10^{-4}
630	20×10^{-4}
640	29×10^{-4}
650	36×10^{-4}

(d) Trouvez l'équation de la droite de régression pour $\ln k$ en fonction de $\frac{1}{T}$. [2]

(e) Trouvez une estimation de

(i) c ;

(ii) A.

Il n'est pas nécessaire d'indiquer les unités pour ces valeurs. [3]

5. [Note maximale : 12]

Un généticien utilise un modèle de chaîne de Markov pour étudier les modifications d'un gène spécifique dans une cellule lors de sa division. Chaque fois que la cellule se divise, le gène peut muter entre son état normal et d'autres états.

Le modèle est de la forme

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix},$$

où X_n est la probabilité que le gène soit dans son état normal après la $n^{\text{ième}}$ division de la cellule, et Z_n est la probabilité qu'il se trouve dans un autre état après la $n^{\text{ième}}$ division de la cellule, où $n \in \mathbb{N}$.

La matrice $\boldsymbol{M}$ est $\begin{pmatrix} 0{,}94 & b \\ 0{,}06 & 0{,}98 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Écrivez la valeur de b.

(ii) Qu'est-ce que b représente dans ce contexte ? [2]

(b) Trouvez les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$. [3]

(c) Trouvez les vecteurs propres de $\boldsymbol{M}$. [3]

(d) Le gène est dans son état normal lorsque $n = 0$. Calculez la probabilité qu'il soit dans son état normal

(i) lorsque $n = 5$;

(ii) à long terme. [4]

6. [Note maximale : 21]

Lors d'un tournoi de tir à l'arc, une compétition particulière consiste à lancer une balle en l'air tandis qu'un archer tente de la toucher avec une flèche.

La trajectoire de la balle est modélisée par l'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_x \\ u_y - 5t \end{pmatrix},$$

où x est le déplacement horizontal par rapport à l'archer et y est le déplacement vertical par rapport au sol, tous deux mesurés en mètres, et t est le temps, en secondes, depuis que la balle a été lancée.

- u_x est la composante horizontale de la vitesse algébrique initiale
- u_y est la composante verticale de la vitesse algébrique initiale.

Dans cette question, la balle et la flèche sont modélisées par des points uniques. La balle est lancée avec une vitesse algébrique initiale telle que $u_x = 8$ et $u_y = 10$.

(a) (i) Trouvez la vitesse initiale de la balle.

(ii) Trouvez l'angle d'élévation de la balle lorsqu'elle est lancée. [4]

(b) Trouvez la hauteur maximale atteinte par la balle. [3]

(c) En supposant que le sol est horizontal et que la balle n'est pas touchée par la flèche, trouvez l'abscisse du point où la balle atterrit. [3]

(d) Pour la trajectoire de la balle, trouvez une expression pour y en fonction de x. [3]

Un archer lâche une flèche à partir du point $(0\ ;\ 2)$. La flèche est modélisée comme se déplaçant en ligne droite, dans le même plan que la balle, avec une vitesse de $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et un angle d'élévation de 10°.

(e) Déterminez les deux positions où la trajectoire de la flèche coupe la trajectoire de la balle. [4]

(f) Déterminez l'instant où la flèche doit être relâchée pour toucher la balle avant que la balle n'atteigne sa hauteur maximale. [4]

7. [Note maximale : 16]

Un scientifique spécialiste de l’environnement est invité par les autorités fluviales à modéliser l’effet d’une fuite d’une centrale électrique sur les niveaux de mercure dans une rivière locale. La variable x mesure la concentration de mercure en microgrammes par litre.

La situation est modélisée à l’aide de l’équation différentielle du deuxième ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 0\,,$$

où $t \geq 0$ est le temps mesuré en jours depuis le début de la fuite. On sait que lorsque $t = 0$, $x = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$.

(a) Montrez que le système d’équations couplées du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x - 3y$$

peut s’écrire comme l’équation différentielle du deuxième ordre donnée. [2]

(b) Trouvez les valeurs propres du système d’équations couplées du premier ordre donné dans la partie (a). [3]

(c) À partir de là, trouvez la solution exacte de l’équation différentielle du deuxième ordre. [5]

(d) Esquissez la représentation graphique de x en fonction t, en indiquant les coordonnées du le maximum de la représentation graphique. [2]

Si les niveaux de mercure sont supérieurs à $0{,}1$ microgramme par litre, la pêche dans la rivière est considérée comme dangereuse et elle est arrêtée.

(e) Utilisez le modèle pour calculer le temps total pendant lequel la pêche devrait être arrêtée. [3]

Les autorités fluviales décident d’empêcher les gens de pêcher dans la rivière pendant 10% de plus que le temps trouvé à partir du modèle.

(f) Écrivez une raison, en faisant référence au contexte, pour appuyer cette décision. [1]

Références :